# Prosou Spring Seminar 2002
# Mathematics note for extraprofessionals

Ario Hoashi[1]

2 Feburary, 2002

この note は，”Prosou Spring Seminar 2002 Mathematics 第２部” に参加する人で位相等について知らない人を対象に作りました．つまり，大学１年でならう数学とセミナーの第２部とのギャップを補うためのものです． 取り急ぎ作ったので雑な物ですが、予習の一助になれば幸いです.

## 1　集合

集合の初歩的な内容はすでに高校で習っていると思うので，割愛します．ここでは，高校では習っていない (と思われる) 内容を補足します.

**Definition 1** どの元も集合であるような集合を，集合族という.

**例 1** $A = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}\}$ とすると，$A$ は集合族です．ここで，例えば $\{a\}$ などは，*1* つの元からなる「集合」です.

余談ですが，集合の集まった物を「集合の集合」と呼ばないのには，ちょっと込み入った事情があります．Rassel のパラドックスと言う,「集合の集合」が一般の集合と違う振舞をしたり注意を要する事例があるのが理由の一つです．それに「集合の集合」なんて長くて呼びにくいですよね.「族」だなんて慣れない言葉が出て来ましたが，すぐに慣れると思います.

**Definition 2** $A$ を集合とする．集合 $A$ の部分集合全体を $\mathfrak{P}(A)$ で表し $A$ のベキ集合という.

**例 2** 集合 $\{a, b, c\}$ のベキ集合は $\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\}$ です.

一般に，集合 $X$ の元の数を $n$ とすると，$X$ のベキ集合 $\mathfrak{P}(X)$ の元の数は $2^n$ です.

## 2　距離空間

良く知られている空間は，ユークリッド空間と言われるものです．よく，2 次元とか 3 次元とか言ったり，高校の時に $x$ 軸, $y$ 軸 等とおいて作図した空間がそれです．ユークリッド空間には様々な特徴があります．逆に言うとユークリッド空間であるためには，幾つかの条件を充たさないとなりません．例えば「距離」と言う概念，座標のパラメータは実数である，などなどがその条件になります．もし，それらの条件の中で特に重要な性質だけを残して，他の条件を無くすとどうなるでしょう．すると，様々な新しい空間が生まれて来ます． その一つがこの Section で扱う**距離空間**です．(もちろん，ユークリッド空間も，距離という条件

[1]Department of Mathematics Fuculty of Science and Technorlogy Keio University

を満たしているので**距離空間**の一つです．ですから，もし以下の話がピンとしない人は，普通の n 次元の話だと思っていて構いません)．

**Definition 3** $X$ を空でない集合とする．関数 $d : X \times X \longrightarrow X$ が次の 3 条件を充たすとき，この関数 $d$ を集合 $X$ 上の距離という．

1. 任意の $x, y \in X$ に対し $d(x, y) \geq 0$ であり，$d(x, y) = 0$ となるのは $x = y$ の時のみ．
2. 任意の $x, y \in X$ に対し $d(x, y) = d(y, x)$.
3. 任意の $x, y, z$ に対し $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

特に，3 つ目の条件は" 三角不等式" と呼ばれるものです．

**Definition 4** 距離空間とは，集合 $X$ とそれに定まった距離関数 $d$ の対 $(X, d)$ のこと．

**Definition 5** 点 $\mathbf{a}$ の $\varepsilon$ -近傍 とは，$\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n | d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) < \varepsilon\}$ なる $\mathbf{R}^n$ の部分集合のことである．

点 $\mathbf{a}$ の$\varepsilon$ -近傍を，$N_\varepsilon(\mathbf{a})$ と表します．人によっては，$N(\varepsilon; \mathbf{a})$ と書きます．
例えば，普通の 2 次元の座標系で考えると，$N_\varepsilon(\mathbf{a})$ と言うのは，点 $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ を中心とする半径 $\varepsilon$ の円の内部の事です．(ただし，境界は含みません)

**Definition 6** $A \subset \mathbf{R}^n$ とする． $A$ の任意の元 $\mathbf{a}$ に対し，$a \in N_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset A$ を充たす $N_\varepsilon$ が存在するとき，$A$ は開集合であるという．

# 3 連続写像

## 3.1 1 次関数の場合

この Section では最終的に $\mathbf{R}^m$から $\mathbf{R}^n$ への連続写像について述べますが，このプリントを読んでいる人の中には 「$\varepsilon$ -$\delta$ なんて聞いたこと無いぞ。」と言う人もいるでしょうから，まず一番簡単な 1 次関数の場合をお話しましょう．(ちなみに $\varepsilon$はイプシロン,$\delta$はデルタ と読みます)

**Definition 7** 関数 $y = f(x) (y \in \boldsymbol{R}, x \in \boldsymbol{R})$ が**連続**であるとは，任意の$\varepsilon > 0$ に対して以下の条件を充たす$\varepsilon$が存在することである．

$$\boldsymbol{R} \text{ の任意の点 } a \text{ について } |a - x| < \delta \text{ならば}, |f(a) - f(x)| < \varepsilon$$

簡単に言ってしまえば，連続と言うのは「無限大に拡大して見ても，つながっている」と言うことですが，$\varepsilon$ -$\delta$ と呼ばれる定義の仕方の最大のメリットは，この「無限大」という全く抽象的な物を使っていない事にあります．具体的な (と言っても $\varepsilon$ だなんて文字で置き換えているのですから，ある意味抽象的ですが) 文字で定義することによって，連続性というものを数学的に検証できるようになるのです．

**例 3** $y = f(x)$ は連続な関数である．(記号や空間は前と同じ )
実際に, 任意の $\varepsilon$ に対して $\delta = \frac{1}{\varepsilon+1}$ とすると，

$$|a - x| < \delta \text{ならば } |f(a) - f(x)| < \varepsilon$$

### 3.2 連続写像

$U, V$ をそれぞれ $\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n$の開集合とする.

**Definition 8** 写像 $f : U \to V$ が **点 $\boldsymbol{a} \in \mathbf{U}$ で連続** とは，$\boldsymbol{a}$ の像 $f(\boldsymbol{a})$ の任意の $\varepsilon$ -近傍 $N_\varepsilon(f(\mathbf{a}))$ に対して, $\delta$ を十分小さくとれば,

$$f(N_\delta(\mathbf{a})) \subset N_\varepsilon(f(\mathbf{a}))$$

となることを言う.

**Definition 9** 写像 $f : U \to V$ が次の 2 条件を充たすとき，$f$ は同相写像であるという.

*1.* $f : U \to V$ は全単射,

*2.* $f : U \to V$ も $f^{-1} : V \to U$ も，ともに連続写像.

**Definition 10** 写像 $f : U \to V$ に対して，$\mathbf{Imf}$ を次のように定める.

$$\mathrm{Im}f := \{f(\mathbf{a}) | \mathbf{a} \in U\}$$

このとき $\mathrm{Im}f$ を写像 $f$ の ***Image*** という.

**Definition 11** $1_V : Y$ の単位元.　写像 $f : U \to V$ に対し，$Ker\mathbf{f}$ を次のように定める.

$$\mathrm{Ker}f := \{\mathbf{a} \in U | f(\mathbf{a}) = 1_V\}$$

このとき $\mathrm{Ker}f$ を写像 $f$ の ***Kernel*** という.

# 4 位相

### 4.1 位相の定義

今回のセミナーの主題にも出ている「位相」と言う言葉ですが，それは一体どういうものなのでしょう.

**Definition 12** 集合 $X$ の部分集合族 $\mathcal{O}$ が次の *3* 条件を満たすとき, $\mathcal{O}$ を $X$ の位相 *(topology)* と呼び，$X$ と $\mathcal{O}$ の対 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間 *(topological space)* と言う.

*(1)* $X \in \mathcal{O}$ かつ $\phi \in \mathcal{O}$,

*(2)* $U_1, U_2, \ldots, U_k \in \mathcal{O}$ ならば $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k \in \mathcal{O}$

*(3)* 任意の集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について, $U_{\lambda \in \mathcal{O}} (\forall \lambda \in \Lambda)$ ならば $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$.

集合 $X$ に 位相 $\mathcal{O}$ を指定すると, 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が出来上がります. 集合 $X$ に 一つの位相を指定することを,「集合 $X$ に位相を入れる」とも言います.

### 4.2 位相の例

それでは実際に位相の例を考えてみましょう．例えば，$X$ という集合が有ったとします．このときに，$\mathcal{O} = \{X, \phi\}$ は集合 $X$ の一つの位相になっています．(実際に定義で求められている位相の３つ条件を満たしていることを，各自で確認してみましょう．もし分かりにくかったら，極々簡単な例を実際に書き下してみると良いでしょう．簡単な具体例を書き出してみるのは数学の常套手段です．)

また，$\mathcal{O} = \mathfrak{P}(X)$ も集合 $X$ の一つの位相となっています．これも紙と鉛筆を使って，いくつか具体的に確かめてみましょう．
始めから、任意の集合 $X$ とすると分かりにくいでしょうから，簡単な例として $X = \{a, b\}$ という集合を考えてみましょう．すると $X$ のベキ集合は $\mathfrak{P}(X) = \{\phi, a, b, a, b\}$ となりますね．見てすぐに分かるように，これは位相である為の一つ目の条件を満たしています． また，明らかに $\mathfrak{P}(X)$ のどの元の共通部分も $\mathfrak{P}(X)$ に属していますね．(紙に書いて確認できましたか？) 最後に，３つ目の条件も明らかでしょう．
ここでは簡単の為，元の数が有限の集合の場合で考えてみましたが，無限個の元を含む集合でも同じです．

**例 4** $m$ 次元空間 $\boldsymbol{R}^m$ の開集合全体のなす集合族 *(*集合の集り*)* を $\mathcal{O}^{(m)}$ とする．すると，これは、$m$ 次元空間の開集合 $\boldsymbol{R}^m$ の位相となる．

この $\mathcal{O}^{(m)}$を $\mathbf{R}^m$の**自然な位相** と言います．特に指定の無い限り，$\mathbf{R}^m$ を位相空間と考えるときはこの位相 $\mathcal{O}^{(m)}$ が指定されているものと考えます．

**理解を深める練習問題 1** 集合 $X = \{a, b, c\}$ にはどういう位相を入れることができるでしょうか．入れることのできる全ての位相を調べてみよう！

## 5 位相空間の間の連続写像

2 つの位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(X, \mathcal{O}_Y)$ があるとします．このとき 2 つの位相空間の間には，連続写像 $f : X \to Y$ を定義することができます．

**Definition 13** $f : X \to Y$ が **連続写像**であるとは, $Y$ の任意の開集合 $U$ の逆像 $f^{-1}(U)$ が $X$ の開集合になることである．

ここで $f^{-1}(B)$ が **逆像** とは，$B$ を $Y$ の部分集合としたときの

$$f^{-1}(B) = \{p \in X | f(p) \in B\}$$

という部分集合である. と言うことです．

さて，ここで出て来た「連続」の定義は前に出て来た定義と違いますが，これらは全く同じ事であるというのは証明されています．(そんなに難しい証明ではありませんがここでは割愛します.)

**Definition 14** $(X, \mathcal{O}_X), (X, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする. 写像 $f : X \to Y$ が次の *2* つ条件を充たすとき，$f$ を**同相写像**という

1. $f : X \to Y$ は全単射,
2. $f : X \to Y$ も $f^{-1} : Y \to X$ も，ともに連続写像.

同相写像にも他の定義の仕方がありますが，定義の仕方によらず同じ事です．またこの定義が一番直感的に分かりやすいと思うので，ここではこの定義を紹介しました.

## 6 予告

これでプリントの第一部は終わりですが，最後に次のプリントに登場する**群**の定義を書いておきます．初めは意味がピンとこないかも知れません. しかし，それで構いません．何度も考え直したり，机を変えて勉強してみたり，或は日を改めて考えてみたり，そうしている内になんとなく分かってくるものなのです．そういう理由で取り合えず頭を慣らす意味で定義だけ示すことにしました.

**Definition 15** $G$ を集合とする.そして $G$ の元には演算 (ここでは $*$ とする) が定まっていて，任意の元 $a, b \in G$ に対して $a * b \in G$ であるとする.$G$ が以下の 3 つの条件を充たすとき, $G$ は**群**であるという

1. 任意の $a, b, c \in G$ に対して, $(a * b) * c = a * (b * c)$,
2. 単位元 $e$ が存在する (任意の $a \in G$ に対して, $a * e = e * a = a$)
3. $G$ の任意の元 $a$ に, 逆元 $a^{-1}$ が存在する.($a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$)

## 7 参考文献


(1) 内田伏一：集合と位相 (1986, 裳華房)

(2) 松阪和夫：集合・位相入門 (1968, 岩波書店)

(3) 松本幸夫：多様体の基礎 (1988, 東京大学出版会)


(1) の本は集合と位相の標準的な教科書です. 慶應義塾大学では集合の授業で，京都大学では位相の授業で，それぞれ教科書として使われています．薄めの本ですが, 良く書かれていると思います.
(2) の本は, 一昔前の標準的な教科書です．いま読んでももちろん素晴らしい本です．(1) と比べると厚い本ですが, 文章形式の説明が多いので, こちらの方が好きな人も多いようです.
(3) の本は集合や位相の教科書ではありませんが, 多様体の非常に良い教科書で, 初心者でも良く分かるように丁寧に書かれています. この本では, 多様体の学習の準備として位相や写像についての説明が第 1 章に載っています. このプリントもこの本の記述を踏襲して書いています.